中文

成大研發快訊　第三十一卷 第七期 - 2018年三月十六日
[http://research.ncku.edu.tw/re/articles/c/20180316/3.html]

波茲曼方程的回顧與進展

吳恭儉
數學系暨應用數學研究所

kcwu@mail.ncku.edu.tw

【106年科技部吳大猷先生紀念獎】得獎人專刊

一、波茲曼方程簡介

波茲曼方程是氣體動力學中最具代表性的方程，其未知量f(t,x,v)是一個機率密度函數(density distribution function)，代表的是在時間t，位置x，可測得氣體分子微觀速度為v的機率，他滿足一個微分方程式

$$\frac{df}{dt} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f).$$

方程式左邊代表的是分子用等速度v的方式來直線運動，而右邊代表的是氣體分子間碰撞的狀況，依據其碰撞狀態可分為硬球(hard sphere)，硬勢(hard potential) 及軟勢(soft potential)。需要一提的是，因為碰撞算子有一些奇異點(singularity)，基於數學上的考量，我們必須將之截斷，這樣的截斷稱之為Grad截斷假設(Grad cut off assumption)。這個方程式滿足了質量守恆，動量守恆及能量守恆，並且entropy是非遞增的，這也能讓我們推出平衡態的形式。

二、波茲曼方程在近代數學上的發展

有關波茲曼方程的數學研究，由於我們已經有了一個穩態解的形式，因此很自然地就會考慮解在穩態附近的行為，另外非線性部分一般而言是屬於高階項(衰減更快的項)，我們把非線性項去掉後，就導出了線性化波茲曼方程。對於線性化波茲曼方程的研究可以回朔到1912年，Hilbert [4]考慮了線性化波茲曼方程，將方程式的解對小的Kundsen數做漸進展開，並看出其流體上的結構，這就是所謂的Hilbert展開。我們必須認知到，這樣的展開都是形式上的展開，並沒有得到嚴格的證明。對線性化算子的數學結構(譜結構，也就是spectrum)，要到1963年由Grad給出了有截斷假設下的硬勢碰撞的完整譜結構[1]。在此之後，整個波茲曼方程的研究開始有了快速的進展，如(以下僅列出與筆者研究較相關者)1974年Ukai[6]運用譜的結果做出了非線性波茲曼方程在穩態附近的well-posedness；2002年起Yan Guo[3]用能量估計的方法處理一系列的動力學方程的存在性與衰減估計；2004年劉太平與尤釋賢[5]構造出線性化波茲曼方程的格林函數，並成功地運用到邊界問題；2013年Gualdani，Mischler與Mouhot[2]研究了以非對稱形式線性化的波茲曼方程等等。

三、逐點估計

一般而言，處理偏微分方程的方法不外乎是能量估計與Sobolev不等式，這樣的處理方式基本上是得到解的平均行為(解經過積分後的行為)，但這樣的結果並無法說明解的局部狀況，簡單的來說也就是解的逐點行為。在線性化波茲曼方程中，第一個能得出逐點行為的結果就硬球的情形，那是劉太平與尤釋賢在2004年所得出[5]，那個結果能完整的將線性化波茲曼方程的解精準的拆解成流體部分、粒子部份及剩餘部分。其中最關鍵的部分就是混和引理(Mixture Lemma)，該引理是將方程內在的速度正則性轉為空間正則性。原始的混和引理證明需要解的完整表示式，但後來證明被筆者抽象化，只需引進一個可與傳輸部分交換的微分算子及能量估計即可[7]。近期筆者與其合作者(上海交大王海濤及成功大學林育竹)已能夠構造出硬勢及軟勢的逐點估計(但須對初值增加速度權)。我們預期這樣的方法也可構造出其他重要的動力學方程，如藍道方程的逐點行為，這對氣體動力學的理解有很大的幫助。

Reference:

1. H. Grad (1963), Asymptotic theory of the Boltzmann equation, Phys. Fluids 6, 147–181.

2. M.P. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot, Factorization of non-symmetric operators and exponential H-theorem, preprint.
3. Y. Guo (2002), The Landau equation in a periodic box. Comm. Math. Phys. 231, 391–434.
4. D. Hilbert (1912), Grundz¨uge einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen (Teubner, Leipzig).
5. T.P. Liu and S.H. Yu (2004), The Green function and large-time behavior of solutions for the onedimensional Boltzmann equation, Comm. Pure Appl. Math., 57 1543–1608.
6. S. Ukai (1974), On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation, Proc. Japan Acad., 50,179–184.
7. K.C. Wu (2014), Pointwise behavior of the linearized Boltzmann equation on a torus. SIAM J. Math. Anal., 46, 639–656.