

# 以NURBS形式表示之輪廓追隨運動之速度場規劃

鄭銘揚\* 王盈惠

國立成功大學電機工程學系

mycheng@mail.ncku.edu.tw

IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 10, pp. 2405-2410, October 2009

## 前言

一般而言，於多軸輪廓追隨運動中，降低追蹤誤差並無法確保輪廓誤差亦可降低。為解決此問題，Li 與 Horowitz提出速度場控制方法[1,2]，由於所建構之速度場只與位置有關，因此所設計之控制器便可著重於降低輪廓誤差。常見的速度場建構方法須計算距離向量，然而對於參數式自由曲線如Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)而言，其相對應的距離向量並不易求得。為克服此困難，本研究採用方向場理論的概念並進而提出一建構速度場的方法。理論分析及模擬結果均顯示本研究所提之方法確實可行。



### 速度場控制與NURBS 簡介

速度場控制[1]的主要概念係利用期望速度場編碼出輪廓追隨運動之期望軌跡。針對一期望速度向量 $V(q(t))$ ，可定義 $\alpha$ 相關之速度誤差為

$$e_{\alpha}(t) = \dot{q}(t) - \alpha V(q(t)) \quad (1)$$

其中， $\dot{q}(t)$ 為實際伺服機構之速度， $\alpha$ 為一大於零之定值。而速度場控制之目的為針對一給定之 $\alpha$ ，使得 $e_{\alpha}(t) \rightarrow 0$ 。

另一方面，二維空間之參數式曲線可表示為 $P(u) = P_x(u)\vec{i} + P_y(u)\vec{j}$ ，其中 $u$ 為一正規化自由參數，即 $0 \leq u \leq 1$ 。而一維NURBS曲線可以參數式表示成[3,4]

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n W_i N_{i,k}(u) C_i}{\sum_{j=0}^n W_j N_{j,k}(u)} \quad (2)$$

其中， $C_i$ 為控制點， $W_i$ 為相對應 $C_i$ 之權重值， $n+1$ 為控制點個數， $k$ 為NURBS曲線之階數； $N_{i,k}(u)$ 為基底函數並可表示為[3]

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & \text{for } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \quad (4)$$

其中 $[u_0, \dots, u_m]$ 為節點向量且 $m=n+k+1$ ， $u$ 為插值參數。

## 以NURBS形式表示之輪廓之速度場建構

在許多運動控制問題中，期望輪廓軌跡均以NURBS形式表示。因此，將速度場控制擴展至NURBS曲線有其必要。然而欲設計一可編碼出期望輪廓軌跡之速度場時，如何找出一明確公式以即時計算出輪廓誤差極為關鍵。因此，本研究將利用方向場理論的概念來解決此一問題。

### A. 方向場理論簡介

在不失一般性考量下，考慮一維度為 $2 \times 1$ 之自主系統，其通式可表示為：

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = f(x, y) \quad (5)$$

假定 $R$ 為一在 $x$ - $y$ 平面之矩形，其範圍為 $a \leq x \leq b$ 與 $c \leq y \leq d$ ，而 $R$ 中之每一點均有一條(5)式的積分曲線通過。顯然，通過 $R$ 中一點 $(x, y)$ 的積分曲線其切線向量為 $f(x, y)$ 。具切線向量 $f(x, y)$ 且通過點 $(x, y)$ 之一短線段稱之為直線元素，而所有此種直線元素的組成稱之為(5)式之方向場[5]。

在不失一般性考量下，假定 $R$ 為一正方形，則 $b-a=d-c$ 。此外，並假設 $R$ 中有 $N \times N$ 個格子點，其座標可定義為

$$X_{i+1} = X_i + h; \quad Y_{i+1} = Y_i + h \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

其中 $h=(b-a)/N$ 為兩個相鄰格子點的距離。

對於每一個格子點 $(x_i, y_i)$ 而言，皆可藉由其切線向量 $f(x_i, y_i)$ 描繪出通過該點之直線元素。因此，由起始點 $(x(0), y(0))$ 開始，可沿著格子點之直線元素描繪出一曲線。若 $h$ 趨近於零，此曲線將收斂至下列初值問題之積分曲線： $\dot{\mathbf{X}} = f(x, y); (x(0), y(0))$ 。

### B. 本研究所提之速度場建構方法

本研究所提方法是以離線方式計算預先所選定格子點之期望速度向量。其概念如下：若期望速度場為連續函數且格子點夠密集，則對於非格子點之期望速度向量可利用一插值公式與其臨近格子點之期望速度向量來估算。具體說明如下：

1). 如圖二(a)所示，若點 $(x, y)$ 位於兩臨近格子點之間，則該點之期望速度向量可由(7)式估算。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_{1x} + v_{2x}}{2} \\ \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

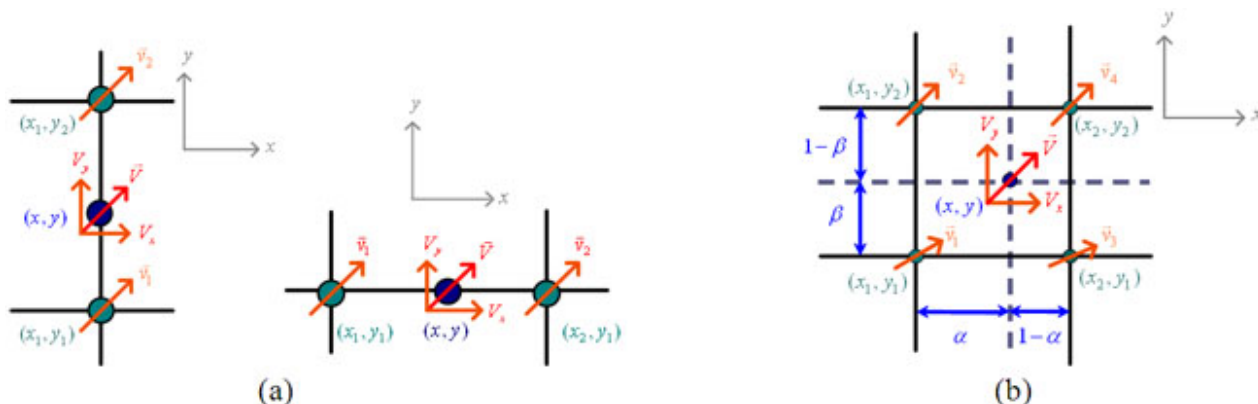
2). 如圖二(b)所示，若點 $(x, y)$ 位於四個格子點所圍成之矩形範圍內，則該點之期望速度向量可由(8)式估算。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \frac{v_{1x} + v_{2x}}{2} + \alpha \frac{v_{3x} + v_{4x}}{2} \\ (1-\beta) \frac{v_{1y} + v_{3y}}{2} + \beta \frac{v_{2y} + v_{4y}}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \beta = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

### C. 本研究所提方法之理論分析

在本研究中，假設 $P(u)$ 為以參數式表示之一 $C^2$ 簡單封閉曲線。本研究的主要貢獻呈現在以下三個定理，其詳細證明過程可參考原文。



圖二、期望速度場 (a). 當 $(x, y)$ 位於兩鄰近格子點間。(b). 當 $(x, y)$ 位於四個格子點所圍成之矩形範圍內。

#### 定理一:

對於 $x$ - $y$ 平面之一矩形 $R$ 內之任一點 $q$ (如圖三)，定義其速度場 $\vec{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 為

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \vec{V}_{Q_q}^f(u) - \zeta(q - Q_q(u)) \quad (9)$$

其中 $u$ 為曲線參數， $Q_q(u)$ 為位於期望輪廓 $P(u)$ 上且最靠近點 $q$ 之位置點， $q - Q_q(u)$ 為距離向量； $\vec{V}_{Q_q}^f(u)$ 為期望進給率於點 $Q_q(u)$ 之切線向量， $\zeta$ 為一大於零之常數。則速度場 $\vec{V}$ 於 $x$ 方向與 $y$ 方向之分量皆為連續函數。

#### 定理二:

對於矩形 $R$ 內之任一點 $q(t)$ (如圖三)，定義其期望速度場為

$$V(q(t)) = \vec{V}_{Q_{q(t)}}^f - \zeta(q - Q_{q(t)}) \quad (10)$$

其中 $Q_{q(t)}$ 為輪廓 $P(u)$ 上最靠近點 $q(t)$ 之位置點。此外， $\vec{V}_{Q_{q(t)}}^f$ 為期望進給率於點 $Q_{q(t)}$ 之切線向量， $\zeta$ 為一大於零之常數。假定對於矩形 $R$ 內之所有點，其速度場 $V(q(t))$ 的分量之一階偏微分皆為 $C^1$ 連續，且若系統處於完美控制，意即 $\dot{q}(t) = V(q(t)) = \vec{V}_{Q_{q(t)}}^f - \zeta(q(t) - Q_{q(t)})$ ，則速度場 $V(q(t))$ 可編碼出輪廓 $P(u)$ 。

#### 定理三:

若兩鄰近格子點之距離趨近於零，則由速度場(7)式或(8)式所編碼出之軌跡的 $\omega$  limit set與由(9)式所編碼出之軌跡的 $\omega$  limit set相同。

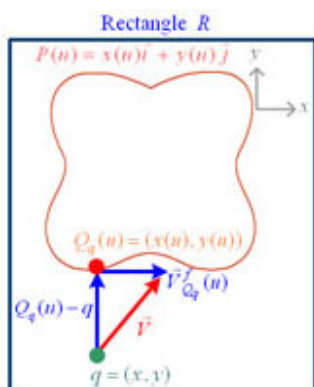
根據上述三個定理，本研究所提之建構速度場方法確實可編碼出以參數式表示之 $C^2$ 簡單封閉曲線。

### 範例說明

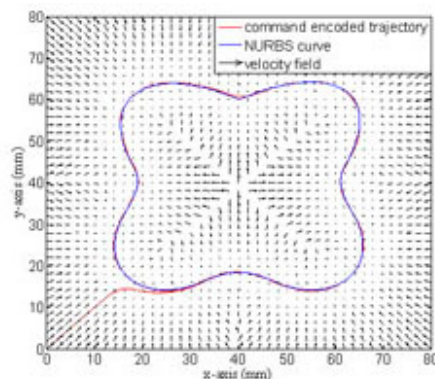
在此範例中，利用(11)式建構以NURBS參數式所表示的四葉草輪廓軌跡之速度場。

$$\vec{V} = \exp^{(-0.4 \times \|p-Q(u)\|)} \vec{V}_{Q(u)}^f - 4(1 - \exp^{(-0.4 \times \|p-Q(u)\|)})(q - Q_q(u)) \quad (11)$$

圖四所示之模擬結果顯示本研究所提方法確實可行。



圖三、以參數式所表示之輪廓其速度場建構之範例說明。



圖四、藍色線為以NURBS所表示之四葉草輪廓；格子點間距 $h$ : 2 mm。紅色線為由速度場所編碼之軌跡；初始位置(0,0)

### 結論

為了建構以NURBS形式表示之輪廓之速度場，本研究利用方向場論理並以離線方式建構預先選定格子點之速度場。於即時應用中，對於非格子點，則可利用一插值公式與臨近格子點之速度向量資訊來估算其相對應之速度向量。於某特定條件限制下，本研究證明以所提方法建構之速度場可編碼出期望輪廓軌跡。最後，利用一範例來驗證本研究所提方法的確可行。

### 參考文獻

- [1] P. Y. Li and R. Horowitz, "Passive velocity field control of mechanical manipulators," *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 15, no. 4, pp. 751-763, Aug. 1999.
- [2] P.Y. Li and R. Horowitz, "Passive velocity field control (PVFC): part II—application to contour following," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, no. 9, pp. 1360-1371, Sept. 2001.
- [3] L. Piegl, "On NURBS: a survey," *IEEE Comput. Graph. Appl.*, vol. 11, no. 1, pp. 55-71, Jan. 1991.
- [4] M.Y. Cheng, M.C. Tsai, and J.C. Kuo, "Real-time NURBS command generators for CNC servo controllers," *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, vol. 42, no. 7, pp. 801-813, May 2002.
- [5] P. V. O'Neil, *Advanced Engineering Mathematics*, 5<sup>th</sup> edition, Thomson Learning, 2003.